

#ESTUDOEMCASA

BLOCO N.º 25		DISCIPLINA MACS/ Matemática
ANO(S)	11.º	
APRENDIZAGENS ESSENCIAIS	<ul style="list-style-type: none"> Investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente; Resolver Problemas simples usando propriedades das progressões aritméticas e geométricas; Resolver problemas simples de modelação matemática no contexto da vida real. 	

Título/Tema do Bloco

Progressões: Problemas em Contexto Real

DAC: MACS, Biologia e Cidadania e Desenvolvimento (Saúde- promoção da saúde)

Modelos Matemáticos / Modelos Discretos
MACS / 2.º ano de Formação

Tarefas/ Atividades/ Desafios

1. As Bactérias

As bactérias reproduzem-se predominantemente por um processo denominado divisão binária.

Este processo ocorre quando uma bactéria duplica o seu material genético e se divide em duas bactérias idênticas à original.

Considere uma bactéria, que se divide em duas e que, a partir desse instante, de 20 em 20 minutos, cada bactéria divide-se em outras duas.

Deste modo, supõe que no instante inicial existem duas bactérias, passados 20 minutos teremos 4 bactérias, ao fim de 40 minutos o número de bactérias existentes já será oito.

Justifique que o número de bactérias existentes passadas 5 horas desde o instante inicial é superior a 65 000.

Adaptado de Exame Matemática B, 2016-1.ª fase

A situação pode representar-se por:

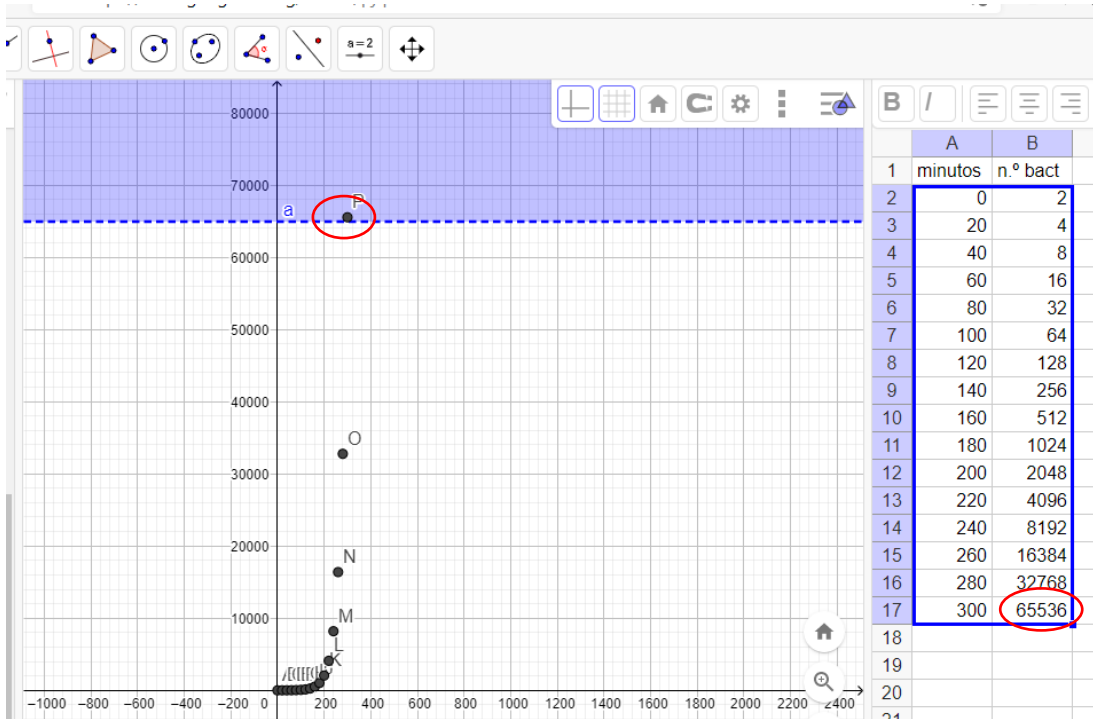
Secundário / 11.ºano

Tempo em minutos	0	20	40	60	...
Número de intervalos de 20 em 20 minutos	0	1	2	3	
Número de Bactérias	2	4	8	16	...

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

Procura-se o número de bactérias passados $5 \times 60 = 300$ minutos

Estratégia 1: Com Recurso ao Geogebra



Estratégia 2: Resolução analítica

Seja b_n o termo geral da progressão geométrica que melhor representa a situação apresentada:

$b_n = b_0 \times r^n$, em que $n \geq 0$ e representa o número de intervalos de 20 minutos que decorreram desde o início da multiplicação das bactérias.

$$\frac{300}{20} = 15$$

Procura-se o número de bactérias existente passados 15 intervalos de 20 minutos cada.

$b_n = b_0 \times r^n$, em que $n \geq 0$ e representa o número de intervalos de 20 minutos que decorreram desde o início da multiplicação das bactérias.

$$b_{15} = 2 \times 2^{15} = 65536$$

O número de bactérias passadas 5 horas é 65536 que é maior que 65000.

2. Um Part-Time

Duas amigas decidiram fazer um inter-rail . Para ajudar a pagar as despesas da viagem, decidiram trabalhar em part-time.

Um Empregador apresentou-lhes a seguinte proposta:

- Teriam de trabalhar 20 horas e no final da jorna seriam remuneradas.
- Podiam optar por uma das seguintes formas de pagamento:
 - Opção 1
Serem remuneradas à hora, num montante de 50€ por hora;
 - Opção 2
Na primeira hora de trabalho receberiam 8€, e em cada uma das horas seguintes mais 5€ do que na hora anterior;
 - Opção 3
A primeira hora seria paga a 0,01€ , em cada uma das horas seguintes o valor seria o dobro do valor da hora anterior.

Qual das opções de pagamento apresentadas será a mais vantajosa?

Secundário
11.ºano

Opção 1

Serem remuneradas à hora, num montante de 50€ por hora;

$$50 \times 20 = 1000\text{€}$$

As amigas ganhariam 1000€ cada uma, um valor que já ajudaria significativamente nas despesas.

Opção 2

Na primeira hora de trabalho receberiam 8€, e em cada uma das horas seguintes mais 5€ do que na hora anterior;

Horas de trabalho	1	2	3	4	...
Valor ganho à hora	8	13	18	23	...

Estratégia 1: Com Recurso ao Excel

PART-TIME	
n	p
1	8
2	13
3	18
4	23
5	28
6	33
7	38
8	43
9	48
10	53
11	58
12	63
13	68
14	73
15	78
16	83
17	88
18	93
19	98
20	103

Soma 1110

Estratégia 2: Resolução analítica

Progressão aritmética de razão 5.

Termo geral: $p_n = p_1 + (n - 1) \times r = 8 + (n - 1) \times 5$

Então : $p_{20} = p_1 + (20 - 1) \times r = 8 + 19 \times 5 = 103€$

Soma dos 20 primeiros termos da progressão:

$$S_n = \frac{p_1+p_{20}}{2} \times n$$

$$S_{20} = \frac{8+103}{2} \times 20=111 \times 10 = 1110$$

As amigas ganhariam 1110€ cada uma, um valor interessante para ajudar nas despesas.

Opção 3

A primeira hora seria paga a 0,01€ , em cada uma das horas seguintes o valor seria o dobro do valor da hora anterior.

Estratégia 1: Com Recurso ao Excel

PART-TIME		
n	$u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,01 \times 2^{n-1}$	
1	0,01	
2	0,02	
3	0,04	
4	0,08	<i>Soma</i> 10485,75
5	0,16	
6	0,32	
7	0,64	
8	1,28	
9	2,56	
10	5,12	
11	10,24	
12	20,48	
13	40,96	
14	81,92	
15	163,84	
16	327,68	
17	655,36	
18	1310,72	
19	2621,44	
20	5242,88	

Estratégia 2: Resolução analítica

Soma dos 20 primeiros termos da progressão $p_n = 0,01 \times 2^{n-1}$

$$S_{20} = p_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 0,01 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} = 10485,75€$$

As amigas ganhariam 10485,75€ cada uma, um valor que já lhes permitiria viajar e ficarem com uma poupança.

A opção 3 é a mais vantajosa como forma de pagamento às 20 horas de trabalho.